έτσι ώστε $f(\bar{y}^{(k)}) - f(\bar{y}^{(k-1)}) = u_k \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{y}^{(k-1)} + \theta_k u_k \bar{e}_k)$

[$g(\theta) := f(\bar{y}^{(k-1)} + \theta u_k \bar{e}_k)$ $\theta \in [0,1]$ $\Rightarrow \exists \theta_k \in [0,1]$
$g(1) - g(0) = g'(\theta_k) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(y^{(k-1)} + \theta_k u_k \bar{e}_k)\, u_k$

4|12|18

Συνέχεια.
$H(\lambda) = f(\bar{y}^{(k-1)} + \lambda \bar{e}_k)$

$\Rightarrow H'(\lambda) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{H(\lambda+h) - H(\lambda)}{h} = \cancel{\lim\limits_{h\to 0} f(\bar{y}^{(k-1)} + \lambda \bar{e}_k)}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f((\bar{y}^{(k-1)} + \lambda \bar{e}_k) + h\bar{e}_k) - f(\bar{y}^{(k-1)} + \lambda \bar{e}_k)}{h} =$

$= \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{y}^{(k-1)} + \lambda \bar{e}_k)$

και $g(\theta) = H(\theta u_k) \Rightarrow g'(\theta) = H'(\theta u_k) \cdot u_k =$
$= u_k \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{y}^{(k-1)} + \theta u_k \bar{e}_k)$]

Άρα: $f(\bar{x} + \bar{u}) - f(\bar{x}) = f(\bar{y}^{(n)}) - f(\bar{y}^{(0)}) =$
$= \sum\limits_{k=1}^{n} \left(f(\bar{y}^{(k)}) - f(\bar{y}^{(k-1)}) \right) =$

$= \sum\limits_{k=1}^{n} u_k \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{y}^{(k-1)} + \theta_k u_k \bar{e}_k) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\bar{x}+\bar{u}) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot \bar{u} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x}) u_k =$

$= \sum\limits_{k=1}^{n} u_k \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{y}^{(k-1)} + \theta_k u_k \bar{e}_k) - \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x}) \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(\bar{x}+\bar{u}) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot \bar{u}| \leq \|\bar{u}\| \sum\limits_{k=1}^{n} \left| \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\ldots) - \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x}) \right|$

Όμως αφού οι $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ είναι συνεχείς στο $\bar{x}$, $\forall k=1,..,n$

$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta \in (0,\delta_0))\ \forall \bar{u} \in B(\bar{0},\delta): \left|\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x}+\bar{u})-\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x})\right| < \frac{\varepsilon}{n}$

και αφού $\forall \bar{u} \in B(\bar{0},\delta)$ ισχύει:

$\bar{y}^{(k-1)} + \delta_k u_k \bar{e}_k - \bar{x} \in B(\bar{0},\delta)$ προκύπτει:

$\forall \bar{u} \in B(\bar{0},\delta)\setminus\{\bar{0}\}: \frac{|f(\bar{x}+\bar{u})-f(\bar{x})-\nabla f(\bar{x})\cdot\bar{u}|}{\|\bar{u}\|} \leq$

$\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$ Δηλ. η f είναι διαφορίσιμη στο $\bar{x}$

Άρα δείξαμε <u>ΣΟ.Σ.</u>

<u>Θεώρημα</u>: Αν $f: B(\bar{x},\delta) \to \mathbb{R}$ μερικώς διαφορίσιμη και $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ συνεχείς στο $\bar{x}$, $\forall i=1,..,n$ τότε f διαφορίσιμη στο $\bar{x}$, το οποίο γενικεύεται και σε διανυσματικές συναρτήσεις.

Αν $\bar{f}: B(\bar{x},\delta) \to \mathbb{R}^m$ μερικώς διαφορίσιμη και $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ συνεχείς $\forall j=1,..,m$, $\forall i=1,..,n$ τότε:

$\bar{f}$: διαφορίσιμη στο $\bar{x}$

<u>Απόδειξη</u>: $\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ διαφορίσιμη στο $\bar{x}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f_j$: διαφ. στο $\bar{x}$, $\forall j=1,..,m$

Πόρισμα: Έστω $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, συνεχώς μερικώς διαφορίσιμη, τότε $\bar{f}$: διαφορίσιμη

Παρατήρηση: Έστω $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, διαφορίσιμη, δηλ. $\exists D\bar{f}: U \to \mathbb{R}^{m \times n}$. Η $\bar{f}$ ονομάζεται συνεχώς διαφορίσιμη αν η $D\bar{f}: U \to \mathbb{R}^{m\times n}$ είναι συνεχής (*)

(*) όπου μια απεικόνιση $A: U \to \mathbb{R}^{m\times n}$ ονομάζεται συνεχής στο $\bar{x}$, αν $\lim_{\bar{u}\to \bar{0}} \|A(\bar{x}+\bar{u}) - A(\bar{x})\| = 0$ (*)

όπου $\|A\| = \|(a_{ji})_{\substack{1\le j\le m \\ 1\le i\le n}}\| := \left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}^2\right)^{1/2}$

Από αυτό προκύπτει ότι $\bar{f}$ συνεχώς διαφορίσιμη $\Leftrightarrow$ $\bar{f}$ συνεχώς μερικώς διαφορίσιμη, αφού

(*) $\Leftrightarrow \lim_{\bar{u}\to\bar{0}} |a_{ji}(\bar{x}+\bar{u}) - a_{ji}(\bar{x})| = 0$, $\forall j = 1, \dots, m$, $\forall i = 1, \dots, n$

SUPER SOS !

Έστω $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό. Τότε $\boxed{\bar{f} \text{ συνεχώς μερικώς διαφορίσιμη}}$ $\Leftrightarrow$ υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι και είναι συνεχείς

$\Updownarrow$

$\bar{f}$: συνεχώς διαφορίσιμη (4)

$\Rightarrow$ $\bar{f}$: διαφορίσιμη

$\Rightarrow \begin{cases} \bar{f}: \text{συνεχής} & (1) \\ \bar{f}: \text{μερικώς διαφορίσιμη} & (2) \end{cases}$

$\Leftarrow$ (3)

Αντιπαραδείγματα: ① $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) = \|\bar{x}\|$

Λύση: συνεχής στο $\bar{0}$, αλλά όχι μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{0}$

συνεχής στο $\bar{0}$: αφού για $\bar{x}_\nu \to \bar{0}$ έχουμε $\|\bar{x}_\nu\| \to \bar{0}$

Π.χ. για $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \nexists$$

② $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

ασυνεχής στο $(0,0)$ αφού $f\left(\frac{1}{\nu}, 0\right) \to 0$ και

$$f\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0$$

αλλά: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = 0$

και: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = 0$

③ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

συνεχής, αφού $|f(x,y)| \leq \dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \dfrac{1}{2} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$

$= \dfrac{1}{2}\|(x,y)\|$

[Εισάγετε ακολουθίες $(x_\nu, y_\nu) \to (0,0)$]

$\to$

Μερικώς διαφορίσιμη στο (0,0) αφού:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

δηλαδή $\nabla f(0,0) = (0,0)$

αλλά $\displaystyle\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - \nabla f(0,0)(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} =$

$\displaystyle = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1 h_2}{h_1^2+h_2^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \nexists$ (βλ. ②)

④ $f(x,y) = \begin{cases} \|(x,y)\|^2 \sin\frac{1}{\|(x,y)\|}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

αφού $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = h'(\|(x,y)\|)\, \frac{\partial \|(x,y)\|}{\partial x}$, όπου:

$h(t) = t^2 \sin\frac{1}{t}$, $t>0$

$h'(t) = 2t \sin\frac{1}{t} - \cos\frac{1}{t}$

άρα: $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(2\|(x,y)\| \sin\frac{1}{\|(x,y)\|} - \cos\frac{1}{\|(x,y)\|}\right)\frac{x}{\|(x,y)\|}$

$\displaystyle\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$ ——— // ——— $\displaystyle\frac{y}{\|(x,y)\|}$

στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

ΔΣ το (0,0) η f είναι διαφ/μη με παράγωγο

$\displaystyle Df(0,0) = \nabla f(0,0) = \text{grad} f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = (0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\|(x,y)\| \sin \frac{1}{\|(x,y)\|} \right) = 0 \quad \underline{\text{ΑΣΚΗΣΗ}}$$

Όμως η f δεν είναι συνεχώς διαφ/μη στο $\mathbb{R}^2$, αφού οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ δεν είναι συνεχείς στο $(0,0)$

Π.χ. για $\frac{\partial}{\partial x}$ (και ανάλογα για $\frac{\partial}{\partial y}$)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\left(2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)}_{=: F(x,y)} \nexists$$

αφού $F\left(\frac{1}{2\pi\nu}, 0\right) = -1 \not\to 0 = F(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

[Επίσης, $F\left(\frac{2}{\pi\nu}, 0\right) = \frac{4}{\pi\nu}(-1)^{\nu+1} \to 0$]

<u>Θεώρημα (Άλγεβρα Παραγώγων)</u>: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό, $\bar{x} \in U$, και $\bar{f}, \bar{g} : U \to \mathbb{R}^m$ και $\varphi : U \to \mathbb{R}$, διαφ/μες στο $\bar{x}$. Τότε οι $\bar{f} + \bar{g} : U \to \mathbb{R}^m$, $\bar{f} \cdot \bar{g} : U \to \mathbb{R}$, $\varphi \cdot \bar{f} : U \to \mathbb{R}^m$ είναι διαφ/μες στο $\bar{x}$, με παραγώγους:

(α) $D(\bar{f} + \bar{g})(\bar{x}) = D\bar{f}(\bar{x}) + D\bar{g}(\bar{x})$

(β) $\underbrace{D(\bar{f}\cdot\bar{g})(\bar{x})}_{= \operatorname{grad}(\bar{f}\cdot\bar{g})(\bar{x})} = \bar{g}(\bar{x})^T \cdot D\bar{f}(\bar{x}) + \bar{f}(\bar{x})^T \cdot D\bar{g}(\bar{x})$

(γ) $\underbrace{D(\varphi\bar{f})(\bar{x})}_{\in \mathbb{R}^{m\times n}} = \varphi(\bar{x}) D\bar{f}(\bar{x}) + \bar{f}(\bar{x}) \underbrace{D\varphi(\bar{x})}_{= \operatorname{grad}\varphi(\bar{x}) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right)}$

$$\bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

Απόδειξη: Αφού η διαφορισιμότητα συνεπάγεται την ύπαρξη των Ιακωβιανών πινάκων και γνωρίζοντας την Άλγεβρα αυτών, μένει να δείξουμε ότι: (π.χ.) για (α):

$$\lim_{\bar{u} \to \bar{0}} \frac{(\bar{f}+\bar{g})(\bar{x}+\bar{u}) - (\bar{f}+\bar{g})(\bar{x}) - (Df(\bar{x}) + Dg(\bar{x}))\bar{u}}{\|\bar{u}\|_2} = \bar{0}$$

$$= \lim_{\bar{u} \to \bar{0}} \frac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{u}) - \bar{f}(\bar{x}) - D\bar{f}(\bar{x})\bar{u}}{\|\bar{u}\|} + \lim_{\bar{u} \to \bar{0}} \frac{\bar{g}(\bar{x}+\bar{u}) - \bar{g}(\bar{x}) - D\bar{g}(\bar{x})}{\|\bar{u}\|}$$